Durumların Sınıflandırılması

Tanım 1. $\{X_{n,}, n \geq 0\}$ kesikli parametreli kesikli durum uzaylı bir Markov Zinciri olsun. Bu zincirin *i*-durumundan *j*-durumuna ilk kez *n* zamanında (ya da *n-inci* adımda) geçme olasılığı n'ye bağlı bir rastgele değişkendir ve aşağıdaki gibi ifade edilir.

$$f_{ij}^{(n)} = P(X_1 \neq j, X_2 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j, X_n = j / X_0 = i) \quad (1)$$

Not. $f_{ij}^{(n)}$ ' de ilk kez *n* adımda i ' den j' ye geçmiş $p_{ij}^{(n)}$ ' de ise ilk kez zorunluluğu yoktur.

Tanım 2. İlk kez i durumundan j durumuna geçiş zamanı,

$$T_{\mathrm{ij}} = \min\{n \geq 1: (X_n = j | X_0 = i)\} \quad (2)$$

Tanım 3. İlk kez i durumundan j durumuna geçiş olasılığı

$$f_{ij} = P(T_{\mathrm{ij}} < \infty) = \sum_{\mathrm{n}=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}. \quad (3)$$

Not. $f_{ij} \neq f_{ij}^{(1)} = p_{ij}$ olduğuna dikkat edilmeli.

$f_{ij} = 1$ ise $T_{\mathrm{ij}} < \infty$. Şayet $T_{\mathrm{ij}} = \infty$ ise i-durumundan başlayan zincir hiç bir zaman j-durumuna gelemez.

Tanım 4. *j* durumunda olan zincirin j ' ye geri dönmesi kesin ise bu duruma rekurent (geri dönülen) durum denir. Yani;

$$f_{jj} = P(T_{\mathrm{jj}} < \infty) = 1. \quad (4)$$

Tanım 5. *j* durumunda olan zincirin j ' ye geri dönmesi olasılığı kesin değil ise bu duruma transient (geçiş) durumu denir.

$$f_{jj} \neq 1 \text{ ve ya } f_{jj} < 1 . \quad (5)$$

Tanım 6. *j* durumundan *j* durumuna ilk dönüş zamanının beklenen değeri aşağıdaki gibidir.

$$M_j = M_{jj} = E(T_{jj}) = \sum_{n=1}^{\infty} nP(T_{jj} = n) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)} \quad (6)$$

Tanım 7. $f_{jj} = 1$ *ve* $M_{jj} < \infty$ ise *j* durumuna pozitif (+) rekurent durum denir.

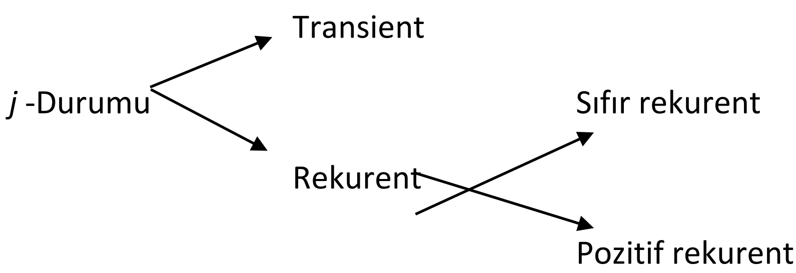
$f_{jj} = 1$ ve $M_{jj} = \infty$ ise *j* durumuna sıfır (etkisiz) rekurent durum denir.

Tanım 8. f_{jj} ve $f_{ij}^{(n)}$ şöyle tanımlanır.

a. $$f_{jj} = \sum_{n}^{\infty} f_{jj}^{(n)} , \quad n \geq 1 \tag{7}$$

b. $$f_{ij}^{(n)} = \sum_{j \neq k} p_{ik} f_{kj}^{(n-1)} , \quad n \geq 2 \tag{8}$$

Durumların sınıflandırılması aşağıdaki şekildeki gibi gösterilir.



Şekil-1

Örnek 1. $\{X_{n,}, n \geq 0\}$ Markov Zinciri, durum uzayı $E = \{$ 0, 1$\}$ ve geçiş matrisi P aşağıdaki gibi veriliyor.

$$P = \begin{bmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{bmatrix}$$

a) 0 durumunun rekurent olup olmadığını bulunuz (f_{00} =?)
b) 0 durumu rekurent ise bunun pozitif rekurent mi yoksa etkisiz rekurent mi olup olmadığını bulunuz(M_{00} =?).

Çözüm a) Yukarıdaki tanımlardan

$f_{00} = 1$ ise 0 durumu rekurenttir veya $f_{00} < 1$ ise 0 durumu transienttir.

$$f_{00} = P(T_{00} < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{00}^{(n)} = p_{00} + \sum_{n=2}^{\infty} f_{00}^{(n)} \quad , \quad p_{00} = 1 - a$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} f_{00}^{(n)} = f_{00}^{(2)} + f_{00}^{(3)} + \cdots$$

$$f_{00}^{(2)} = p_{01} f_{10}^{(1)} = p_{01} p_{10}, \qquad p_{00} = 1 - a, \;\; f_{10} \neq f_{10}^{(1)} = p_{10}$$

$$f_{00}^{(3)} = p_{01} f_{10}^{(2)}, \qquad f_{10}^{(2)} = p_{11} f_{10}^{(1)} = p_{11} p_{10}$$

$$f_{00}^{(3)} = p_{01}p_{11}p_{10}$$

$$f_{00}^{(4)} = p_{01}p_{11}^{(2)}p_{10}$$

$$\vdots$$

$$f_{00}^{(n)} = p_{01}p_{11}^{(n-2)}p_{10}$$

$f_{00} = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + 0 + 0 + \cdots = 1$ olduğundan 0- durumu rekurenttir.

b) (6) eşitliğinden

$$M_{00} = E(T_{00}) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{00}^{(n))}$$

$$= 1f_{00}^{(1)} + \sum_{n=2}^{\infty} na\,(1-b)^{(n-2)}$$

$$= \frac{a+b}{b} < \infty.$$

Böylece 0 - durumunun pozitif rekurent olduğu sonucuna varılır.

Örnek 2. Durum uzayı $E = \{0\,,1\}$ ve bir adım geçiş matrisi aşağıda verilen Markov zincirinin durumlarını sınıflandıralım.

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$f_{00} = 1$ ve $M_{00} = \frac{5}{3} < \infty$ olduğundan 0-durumu pozitif rekurenttir. Aynı mantıkla 1 durumuna da bakılabilir.

Örnek 3. Durum uzayı $E = \{0\,,1,2\}$ olan ve bir adım geçiş matrisi aşağıda verilen Markov zincirinin 0 durumunu inceleyelim.

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

(1) eşitliğinden

$$f_{00}^{(1)} = P(X_1 = 0\,/\,X_0 = 0) = p_{00} = 0.$$

$$\boldsymbol{f_{00}^{(2)}} = P(X_2 = 0\,, X_1 = 1{,}2\,/\,X_0 = 0) = p_{01}p_{10} + p_{02}p_{20}$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$f_{00}^{(3)} = P(\;X_3 = 0\,,\;X_2 = 1{,}2,\;X_1 = 1{,}2\,/\,X_0 = 0)$$

$$= p_{01}p_{11}p_{10} + p_{01}p_{12}p_{20} + p_{02}p_{21}p_{10} + p_{02}p_{22}p_{20}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$f_{00}^{(4)} = P(\ X_4 = 0\ ,\ X_3 = 1{,}2\ ,\ X_2 = 1{,}2,\ X_1 = 1{,}2\ /\ X_0 = 0)\ X_0 = 0)$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

$$\vdots$$

$$f_{00}^{(n)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{(n-1)}.$$

$$f_{00} = f_{00}^{(1)} + f_{00}^{(2)} + f_{00}^{(3)} + f_{00}^{(4)} + \cdots$$

$$= 0 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \cdots$$

$$= 1.$$

Ayrıca $M_{00} = 3$ bulunur. 0 durumu pozitif rekurenttir.

Ödev 1. Durum uzayı $E = \{0, 1, 2, 3, 4\ \}$ olarak verilen bir Markov zincirinin bir adım geçiş matrisi aşağıda veriliyor. f_{22} olasılığını bulunuz.

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/5 & 2/5 & 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

Teorem 1. $\{X_{n,}, n \geq 0\}$ kesikli parametreli kesikli durum uzaylı bir Markov Zinciri ve durum uzayı $E = \{\ 0, 1, 2,\ \cdots\}$ ve geçiş olasılığı p_{ij} dir. Bu bağlamda $p_{ij}^{(n)}$ olasılığı için aşağıdaki formül doğrudur

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)}\ , \qquad n \geq 1 \tag{10}$$

İspat. $p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j/X_0 = i)$ ve aşağıdaki olayı göz önüne alalım.

$$B_n = \{X_1 \neq j, X_2 \neq j, \dots, X_{n-1} \neq j, X_n = j\}$$

ve zincirin ilk kez n adımda j durumunda olması olayı olsun. Toplam olasılık formülüne göre aşağıdaki ifade yazılır.

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} P(X_n = j/X_0 = i,\ B_k)\, P(B_k/X_0 = i)$$

Buradan da

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p_{jj}^{(n-k)} \;, \qquad\qquad n \geq 1$$

elde edilir. Bu teoreme ***ilk varış teoremi*** denir.

Teorem 2. $\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty \;\Rightarrow j$ - durumu rekurent, ,

$\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty \;\Rightarrow\; j$ - durumu transienttir.

İspat. Pozitif tamsayılar için X tesadüfi değineninin olasılık çıkaran fonksiyonu

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X = k) z^{k} \;, \quad |z| < 1 \qquad (11)$$

olmak üzere $f_{jj}^{(n)}$ in olasılık çıkaran fonksiyonu

$$F_{jj}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} z^{n} \qquad (12)$$

$p_{jj}^{(n)}$ in olasılık çıkaran fonksiyonu

$$P_{jj}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} z^{n}. \qquad (13)$$

Teorem 1' deki eşitliğin her iki tarafını z^{n} ile çarpıp 1 den ∞ a kadar toplanırsa,

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}^{(n)} z^{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} p^{(n-k)} z^{n}$$

Eğer sol taraf 0 dan başlasaydı üreten fonksiyon olacaktı. Bu bağlamda,

$$P_{ij}(z) - p_{ij}^{(0)} = P_{ij}(z) - \delta_{ij} = \sum_{k=1}^{\infty} [\sum_{n=k}^{\infty} p_{jj}^{(n-k)} z^{(n-k)}] f_{ij}^{(k)} z^{k}$$

$$P_{ij}(z) - \delta_{ij} = P_{ij}(z) F_{ij}(z). \qquad (14)$$

(14) formülünde $i = j$ ise $\delta_{ij} = 1, i \neq j$ ise $\delta_{ij} = 0$

$$P_{jj}(z) - 1 = P_{jj}(z) F_{jj}(z).$$

$$F_{jj}(z) = 1 - \frac{1}{P_{jj}(z)} = 1 - \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} z^{n}} \qquad (15)$$

(15)' de $z = 1$ alınırsa

$$F_{jj}(1) = 1 - \frac{1}{\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)}} \qquad (16)$$

Eğer burada $\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} = \infty$ ise j durumu rekurent ,

$\sum_{n=0}^{\infty} p_{jj}^{(n)} < \infty$ ise j durumunun transient olduğu görülür.

Sonuç. Tanım 4 ve Tanım 5' den

$$P\left(T_{jj} < \infty\right) = F_{jj}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = f_{jj} \tag{17}$$

elde edilir. Teoremin sonucu olarak

$$P\left(T_{jj} < \infty\right) = 1 \implies \quad F_{jj}(1) = 1 - \frac{1}{\infty} = 1$$

Teorem 3. $F'_{jj}(1) = M_{jj}$

İspat. $F_{jj}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} z^n$

$$\implies \frac{\partial F_{jj}(z)}{\partial z} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)} z^{n-1}$$

Buradan

$$F'_{jj}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)} = M_{jj}. \tag{18}$$

Örnek. Bir pazarlamacının A, B ve C kentleri gibi üç bölgesi vardır. Bu pazarlamacı aynı kentte ardı ardına satış yapamaz. Eğer bir gün A kentinde satış yapmışsa ertesi gün B kentinde satış yapar. Bununla beraber B de ya da C de satış yaparsa ertesi gün A kentinde iki katı kadar satış yapar. Buna göre,

a. Bir adım geçiş matrisini oluşturunuz.
b. Satışa C den başlamışsa bir hafta sonra tekrar C de satış yapma olasılığı ne olur.
c. Satışa A dan başlamışsa üç gün sonra B de beş gün sonra C de satış yapma olasılığı nedir.
d. B den B ye ilk geçişin olasılık çıkaran fonksiyonunu buluyuz**.**
e. B den B ye ilk dönüş olasılığını bulunuz.
f. B den B ye ilk dönüş ortalama kaç günde gerçekleşir.

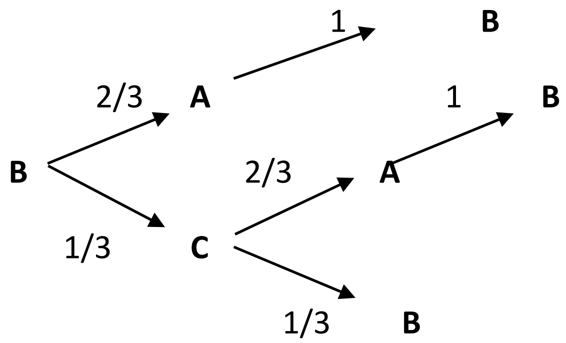
Çözüm. Bu zincirin durum uzayı $E = \{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\}$ dir.

a. $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix}$

b. $P(X_7 = C / X_0 = C) = p_{CC}^{(7)} = 0.1728$

c. $P(X_3 = B,\ X_5 = C\ / X_0 = A) = p_{AB}^{(3)} p_{Bc}^{(2)} = 0{,}7778.0 = 0$

d. B durumundan başlayan zincirin ulaşabileceği muhtemel durumlar aşağıdır.



Şekil -2

(12) eşitliğinden

$$F_{BB}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{BB}^{(n)} z^n$$

$$F_{BB}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{BB}^{(n)} z^n = \frac{2}{3}1.\, z^2 + \frac{1}{3}\frac{2}{3}1.\, z^3 + \frac{1}{3}\frac{1}{3}\, z^2.$$

$$F_{BB}(z) = \frac{7z+2z^3}{9}.$$

e. (17) eşitliğinden ve yukarıdaki $F_{BB}(z)$ ifadesinden $F_{BB}(1) = f_{BB} = 1$ olur, yani B durumu ***rekurenttir***, satıcı bu bölgeye 1 olasılığı ile kesin dönecektir.

f. Teorem 3 den

$$F'_{BB}(z) = \frac{14z+6z}{9}$$

$$F'_{BB}(1) = M_{BB} = 20/9$$

olarak bulunur, yani satıcının B bölgesinden çıktığı günden itibaren ***ortalama*** $20/9$ gün içerisinde geri dönmesi beklenir.

İlk varış olasılıklarının matrisler yardımıyla bulunması.

$$f_{ij}^{(n)} = \sum_{j\neq k} p_{ik} f_{kj}^{(n-1)} \qquad n \geq 2$$

(9) formülünü matris biçiminde yazarsak

$$\varphi_j^{(n)} = Q \ \varphi_j^{(n-1)}, \qquad n \geq 2 \qquad (19)$$

P' de $\begin{bmatrix} p_{oj} \\ p_{1j} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$ yazarak Q matrisi elde edilir ve $\varphi_j^{(n)} = \begin{bmatrix} f_{0j}^{(n)} \\ f_{1j}^{(n)} \\ \vdots \end{bmatrix}$ olarak tanımlanır.

Örnek. $\{Y_{n,}, n \geq 0\}$ Markov Zinciri, durum uzayı $E = \{ 0, 1, 2 \}$ ve geçiş matrisi P aşağıdaki gibi veriliyor.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/6 & 1/3 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \end{bmatrix}$$

$j = 2$ için $f_{ij}^{(n)}$ değerlerini bulunuz. Ayrıca **2** durumunu inceleyiniz.

Çözüm. (19) formülünden $n = 2$ için

$$\begin{bmatrix} f_{02}^{(2)} \\ f_{12}^{(2)} \\ f_{22}^{(2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3}\frac{1}{6} \\ \frac{3}{5}\frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

$n = 3$ için

$$\begin{bmatrix} f_{02}^{(3)} \\ f_{12}^{(3)} \\ f_{22}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3}\frac{1}{6} \\ \frac{3}{5}\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3}(\frac{1}{6})^2 \\ \frac{3}{5}\frac{1}{6}\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$n = 4$ için

$$\begin{bmatrix} f_{02}^{(4)} \\ f_{12}^{(4)} \\ f_{22}^{(4)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3}\,\frac{1}{6} \\ \frac{3}{5}\,\frac{1}{5} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3}\ (\frac{1}{6})^3 \\ \frac{3}{5}\ (\frac{1}{6})^2\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Genel halini yazarsak $\varphi_2^{(n)} = \begin{bmatrix} f_{02}^{(n)} \\ f_{12}^{(n)} \\ f_{22}^{(n)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3}\ (\frac{1}{6})^{n-1} \\ \frac{3}{5}\ (\frac{1}{6})^{n-2}\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

$f_{22} = f_{22}^{(1)} + \sum_{n=2}^{\infty} f_{22}^{(n)} = \frac{1}{5} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3}{5} (\frac{1}{6})^{n-2} \frac{1}{3} = \frac{11}{25} < 1$ olduğundan 2 durumu transienttir.

Tanım 9. $p_{ij}^{(r)} > 0$ olacak biçimde bir $r > 0$ tamsayısı varsa i durumunun j durumu ile bağlantısı vardır. Eğer i, j ile bağlantılı $(i \to j)$ ise ve j, i, ile $(j \to i)$ bağlantılı ise i ve j ' ye karşılıklı bağlantılı $(i \leftrightarrow j)$ durumlar denir.

Tanım 10. $j \in E$ için $p_{jj} = 1$ ise j-durumuna yutucu durum denir.

Tanım 11. Elemanları bir Markov zincirinin durumları olan bir $S \neq \emptyset$ kümesi için,

$$p_{ij}{}^{(n)} = 0, \qquad i \in S, j \notin S$$

sağlanıyorsa, *S* kümesi *kapalıdır* denir. Yukarıdaki tanımdan şu sonuca varılır; Eğer *S* kümesi yalnızca bir durum içeren kapalı bir küme ise bu durum yutucu bir durum olmak zorundadır.

Tanım 10. Tanım. S kümesi bir Markov zincirinin *kapalı* kümesi olsun. *S* kümesindeki her durum aralarında bağlantılı ise Skümesine *indirgenemez küme*, bu Markov Zincirine de *indirgenemez* Markov Zinciri denir.

Tanım 11. j - durumunun periyodu

$$d(j) = eob\{n \geq 1;\ p_{jj}^{(n)} > 0\}$$

olarak veriliyor, buradaki eob en büyük ortak bölendir. Eğer $d(j) > 1$ ise **.** j durumu $d(j)$ periyodu ile periyodik olarak adlandırılır. Eğer $d(j) = 1$ ise **.** j durumu periyodik değildir. Her zaman $p_{jj} > 0$ olduğunda da j durumu periyodik değildir.

Tanım 12. j – durumu periyodik olmayan bir durum ve pozitif rekurent ise bu duruma *ergodik* durum denir.

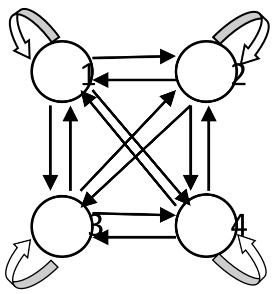
Tanım 13. Bir Markov zincirinin geçiş matrisinin herhangi bir kuvvetinin bütün elemanları pozitif ise yani $p_{ij}^{(r)} > 0$ olacak biçimde bir $r \in \mathbb{Z}^{+}$ sayısı varsa bu matrise regüler stokastik matris denir.

Örnek. $\{X_{n,}, n \geq 0\}$ kesikli parametreli kesikli durum uzaylı bir Markov Zinciri ve durum uzayı $E = \{0, 1,2,3\}$ ve bir adım geçiş matrisi de

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0.1 & 0.9 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Bu zincir indirgenemez bir Markov zincirimidir?
b) Bu matrisin durumlarının periyodik olup olmadığını bulunuz.
c) Bu matrisin tüm durumları için rekurentliği araştırınız.

Çözüm. a) İlk geçiş matrisi için(tek adımda), $(\mathbf{1} \leftrightarrow \mathbf{3})$, $(\mathbf{1} \leftrightarrow \mathbf{4})$, $(\mathbf{2} \leftrightarrow \mathbf{3})$, $(\mathbf{2} \leftrightarrow \mathbf{4})$ karşılıklı bağlantılıdır. Ayrıca diğer durumlar içinde P^2 ye (iki adıma) göre karşılıklı bağlantılıdır. $(\mathbf{1} \rightarrow \mathbf{3} \rightarrow \mathbf{2})$ ve $(\mathbf{2} \rightarrow \mathbf{3} \rightarrow \mathbf{1})$ olur bu $(\mathbf{1} \leftrightarrow \mathbf{3} \leftrightarrow \mathbf{2})$ anlamında dır.



Şekil -1

Bu şekilden de görülebileceği gibi 1 ile 3 $(1 \leftrightarrow 3)$, 1 ile 4 $(1 \leftrightarrow 4)$ ve 2 ile 3 $(2 \leftrightarrow 3)$, 2 ile 4 $(2 \leftrightarrow 4)$ ilk geçiş matrisinde karşılıklı bağlantılıdır. İki aşamada ise $(1 \leftrightarrow 3 \leftrightarrow 2)$ ve $(3 \leftrightarrow 1 \leftrightarrow 4)$ olur. Bu durumu geçiş matrisinin ikinci kuvvetinden de görebiliriz.

$$P^2 = \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0{,}75 & 0 & 0 \\ 0{,}16 & 0{,}84 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}32 & 0{,}68 \\ 0 & 0 & 0{,}23 & 0{,}77 \end{bmatrix}$$

b) P matrisinde $p_{jj} > 0$ ve P^2 matrisinde ise $p_{jj}^2 = 0$ olduğundan $d(j) = 2$ olur. Yani köşegen elemanları matrisin tek kuvvetinde sıfırı çift kuvvetinde ise sıfırdan farklı değerler alır. Böylece 1, 2, 3, 4 durumlarının **2** periyodu ile periyodik olduğunu söyleyebiliriz.

c) Tüm durumlardan diğer durumlara geçiş olduğundan durumların tümü rekurenttir.

Teorem. Eğer $i \leftrightarrow j$ karşılıklı bağlantılı ise o zaman aşağıdaki koşullar sağlanır.

a) i ve j aynı periyoda sahiptir.
b) i transient ise j de transienttir.
c) i sıfır rekurent ise j de sıfır rekurenttir.

Örnek. Durum uzayı $E = \{ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6 \}$ olan bir MZ nin bir adım geçiş matrisi aşağıdadır.

$$P = \begin{bmatrix} 0.50 & 0.50 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.25 & 0.75 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.00 & 0.00 \\ 0.25 & 0.00 & 0.25 & 0.25 & 0.00 & 0.25 \\ 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0.00 & 0,50 & 0,50 \\ 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,00 & 0,50 & 0,50 \end{bmatrix}$$

Bu matrisin durumlarını inceleyelim: $\{ 1,\ 2\}$ ve $\{ 5,\ 6 \}$ kümeleri indirgenemez kapalı kümelerdir, ve pozitif rekurenttirler. 3 ve 4 durumları transienttirler. $3 \longrightarrow 4 \rightarrow 6$ ancak 6'dan geriye dönüş yoktur. Tüm durumlar aperiyodiktir çünkü $p_{jj}^{(k)} > 0$. Böylece 3 ve 4 durumları transient 1,2,5 ve 6 durumları ergodiktir.

$$f_{11}^{(n)} = \begin{cases} p_{11} = 0.50 & n = 1 \\ p_{12} p_{22}^{(n-2)} p_{21} = (0.5)(0.75)^{n-2}(0.25) & ;\ n \geq 2 \end{cases}$$

$f_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{11}^{(n)}$ olduğundan 1 durumunun rekurent olduğu ve

$M_{11=} \sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}^{(n)} = 3$ den de pozitif rekurent olduğu görülür. Ayrıca 2,

5 ve 6 durumları içinde ortalama dönüş zamanları da bulunabilir.

f_{33} için ,

$$f_{33}^{(n)} = \begin{cases} p_{33} = 0.25 & ;\ n = 1 \\ p_{34} p_{44}^{(n-2)} p_{41} = (0.25)(0.25)^{n-2}(0.25) & ;\ n \geq 2 \end{cases}$$

$f_{33} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{33}^{(n)} = \frac{1}{3} < 1$ olduğundan 3 durumu transienttir bu 4 durumu içinde geçerlidir.